



2021 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

\*\*\*\*\*

招生专业与代码：070201 理论物理、070205 凝聚态物理、070207 光学、0702Z1 计算物理  
考试科目名称及代码：601 高等数学（正卷）

考生注意：所有答案必须写在答题纸（卷）上，写在本试题上一律不给分。

本试卷满分为 150 分，考试时间为 3 小时。

一、填空题（共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 函数极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(2x + 1)}{1 - \cos x} =$  \_\_\_\_\_.

2. 已知  $f'(3) = 2$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} =$  \_\_\_\_\_.

3. 设常数  $k > 0$ , 函数  $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$  在  $(0, +\infty)$  内零点的个数为 \_\_\_\_\_.

4. 不定积分  $\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} =$  \_\_\_\_\_.

5. 用曲线  $\begin{cases} 4(x-1)^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$  绕  $x$  轴旋转一周得到一个旋转曲面, 则该曲面的方程是 \_\_\_\_\_.

6. 设  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的函数, 在区间  $[0, 2\pi)$  上表达式是  $f(x) = x^2$ , 则  $f(x)$  的傅里叶级数在  $x = 0$  时收敛于 \_\_\_\_\_.

7. 向量组  $\alpha_1 = (1, 1, 0), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (1, 0, 1)$ , 则将向量  $\beta = (4, 5, 3)$  表示为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合为  $\beta =$  \_\_\_\_\_.

8. 设  $f(x, y, z) = x^2 + 4xy + ky^2 + z^2$  为正定二次型, 则实数  $k$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

二、单选题（共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 函数极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x \ln(1+x)}}$  的值等于.....( )  
 (A)  $e^{\frac{1}{6}}$  (B)  $e^{\frac{1}{6}}$  (C)  $e^{\frac{1}{3}}$  (D)  $e^{\frac{1}{3}}$
2. 若函数  $f(x)$  满足  $f'(x) = e^{f(x)}$ , 且  $f(0) = 1$ , 则  $f^{(n)}(0) = \dots\dots\dots( )$   
 (A)  $(n-1)! \cdot e^n$  (B)  $n! \cdot e^n$  (C)  $(n-1)! \cdot e^{n-1}$  (D)  $n! \cdot e^{n-1}$
3. 假设  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  的一个原函数, 则必有.....( )  
 (A)  $F(x)$  是偶函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是奇函数 (B)  $F(x)$  是奇函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是偶函数  
 (C)  $F(x)$  是周期函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是周期函数 (D)  $F(x)$  是单调函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是单调函数
4. 微分方程  $xy \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$  的通解为.....( )  
 (A)  $y^2 = 2x^2(\tan x + C)$  (B)  $y^2 = \frac{1}{2}x^2(\ln|x| + C)$  (C)  $y^2 = 2x^2(\ln|x| + C)$  (D)  $y^2 = \frac{1}{2}x^2(\tan x + c)$
5. 在  $xOy$  面上到直线  $x=0, y=0$  及  $x+2y-16=0$  的距离平方和最小的点为.....( )  
 (A) (2, 4) (B) (4, 2) (C) (8/5, 4/5) (D) (8/5, 16/5)
6. 积分  $\int_0^1 dx \int_x^1 x \sqrt{y^2 - x^2} dy = \dots\dots\dots( )$   
 (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{1}{12}$  (D)  $\frac{1}{24}$
7. 已知  $\Gamma$  为圆周  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$ , 则  $\oint_{\Gamma} (x^2 + x) ds = \dots\dots\dots( )$   
 (A)  $\pi a^3$  (B)  $2\pi a^2$  (C)  $\frac{2}{3}\pi a^2$  (D)  $\frac{2}{3}\pi a^3$
8. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  其中两个特征值为  $\lambda_1 = 1$  和  $\lambda_2 = 2$ , 则  $x = \dots\dots\dots( )$   
 (A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1

三、解答题 (共9小题, 每小题8分, 共72分)

1. 设  $y = y(x)$  由方程  $x^2 + y = \tan(x - y)$  所确定, 且  $y(0) = 0$ , 求  $y'(0)$  和  $y''(0)$ .

2. 求不定积分  $\int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx$ .

3. 求曲线  $y^2 = 2x$  与直线  $y = x$  所围区域绕  $x = 2$  旋转一周所得旋转体的体积.

4. 设  $f(x)$  满足  $f'(x) + 2f(x) - 3 \int_0^x f(x-t) dt = -3x + 2$ , 且  $f'(0) = 0$ , 求  $f(x)$ .

5. 求直线  $\begin{cases} 2x - 4y + z = 0 \\ 3x - y - 2z - 9 = 0 \end{cases}$  在平面  $4x - y + z = 1$  上的投影.

6. 求  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$ , 其中  $\Sigma$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  及平面  $z = 1$  所围区域的整个边界曲面.

7. 将函数  $f(x) = \frac{1}{3+4x}$  展开为  $x+2$  的幂级数, 并给出收敛域.

8. 计算四阶行列式  $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$  的值.

9. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $A^{-1}$ .

四、证明题 (共2小题, 每小题7分, 共14分)

1. 设数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 = \sqrt{2}$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ . 证明数列收敛, 并求出极限.

2. 设  $z = xy + xF(y/x)$ , 而  $F(u)$  可微, 证明  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$ .